Семинар ФУ, тема 4, занятия 7-8

Процессы в плазменных установках

Зарядность иона с зарядом Q: $Z = \frac{Q}{e}$. Для иона *i*-го сорта Z_i: определяет численно недостаток (положительная зарядность) или избыток (отрицательная зарядность) электронов в ионизованном атоме.

Условие квазинейтральности: ионизованного газа:

$$\sum_{i=1}^{I} n_{i0} Z_i = n,$$

n_{i0}- невозмущенная концентрация ионов *i*-го сорта, *n*- невозмущенная электронная концентрация.

Уравнение Максвелла для электрического поля

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{4-1}$$

где ρ- плотность электрического заряда, ε_0- электрическая постоянная.

Уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Пространственное распределение Больцмана для коллектива заряженных микрочастиц находящихся в электрическом поле с распределением потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ определяется формулой:

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \exp[-\frac{Z\varphi(\mathbf{r})}{\theta}]. \tag{4-2}$$

Теорема Гаусса выражается следующим интегральным соотношением:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{4-3}$$

где ***E***- вектор напряженности электрического поля, *Q*- электрический заряд, охватываемый замкнутой поверхностью, по которой в (4-3) проводится интегрирование.

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\mathbf{j} = 0,$$

где $$\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_e + e\sum_{i=1}^{I} n_i Z_i \mathbf{v}_i \qquad (4\text{-}4)$$

- вектор плотности электрического тока, $\mathbf{v}_{e,i}$- скорости электронов и ионов.

Закон Ленца (электромагнитной индукции) выражается следующим интегральным соотношением:

$$-\frac{d}{dt}\oint \mathbf{B}d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E}d\mathbf{l}, \qquad (4\text{-}5)$$

где **B**- вектор индукции магнитного поля. Интегрирование в левой части уравнения ведется по поверхности, охватываемой замкнутым контуром, по которому ведется интегрирование в правой части.

Закон полного тока выражается следующим интегральным соотношением:

$$\oint d\mathbf{l}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int_S d\mathbf{S}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \qquad (4\text{-}6)$$

Эффективное интегральное микросечение столкновения в «лабораторной системе отсчета», где частица- мишень покоится, а частица- снаряд движется, определяется отношением потока событий рассматриваемого столкновения к плотности потока налетающих частиц- снарядов.

4-1. В ионизованный газ, содержащий ионы с концентрациями- n_i и зарядностями Z_i, помещается плоская, абсолютно прозрачная, бесконечнопроводящая сетка, находящаяся под электрическим потенциалом U. Найти установившееся пространственное распределение потенциала в ионизованном газе, если температура плазмы по электрофизической шкале- θ, а невозмущенная электронная плотность- n. Рассмотреть случай, когда $U \ll \theta$, а размеры плазменного образования и сетки можно считать бесконечно большими.

Пусть сетка расположена в плоскости x=0. Найдем распределение потенциала $\varphi(x)$. Оно подчиняется самосогласованному уравнению Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{e}{\varepsilon_0}(n_e - \sum_{i=1}^{I} Z_i n_i), \tag{4-7}$$

где n_i- концентрация ионов. Они подчиняются распределению Больцмана:

$$n_i = n_{i0}\exp(-\frac{Z_i\varphi}{\theta}),\ n_e = n\exp(\frac{\varphi}{\theta}).$$

Учитывая условие $U \ll \theta$, экспоненты в этих выражениях можно разложить в ряд Тейлора, ограничиваясь линейным членом разложения. После подстановки полученных выражений в уравнение Пуассона, с учетом условия квазинейтральности, приходим к линейному дифференциальному уравнению второго порядка для потенциала:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{\varphi}{\lambda_D^2} = 0, \tag{4-8}$$

где

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{e}}\sqrt{\frac{\theta}{n + \sum_{i=1}^{I} n_{i0} Z_i^2}} = 7.44\ 10^3 \sqrt{\frac{\theta}{n + \sum_{i=1}^{I} n_{i0} Z_i^2}} = 7.44\ 10^3 \sqrt{\frac{\theta}{\sum_{i=1}^{I} n_{i0} Z_i (1 + Z_i)}} \tag{4-9}$$

- параметр имеющий физический смысл длины, на которой потенциал спадает в е раз, называемый **«длиной Дебая»**. Он определяет характер экранирования электрического поля рассматриваемой средой.

Решение этого уравнения, с учетом естественного условия $\varphi(\pm\infty)=0$, дает искомое распределение потенциала, которое имеет вид:

$$\varphi(x) = U\exp(-\frac{|x|}{\lambda_D}).$$

4-2. В условиях предыдущей задачи найти распределение потенциала для неравновесного ионизованного газа с температурами электронов θ_e и каждого ионного компонента θ_i соответственно.

В данном случае для ионных и электронных концентраций будут справедливы следующие пространственные распределения:

$$n_i = n_{i0}\exp(-\frac{Z_i\varphi}{\theta_i}),\ n_e = n\exp(\frac{\varphi}{\theta_e}).$$

Находясь в условиях $U \ll \theta_{i,e}$, можно, по аналогии с предыдущей задачей, разложить эти экспоненты в ряд Тейлора, ограничиваясь линейными членами разложения.

Подставляя полученные выражения для концентраций в уравнение (4-7) приходим к уравнению (4-8), в котором параметр «длины Дебая» будет определяться следующим соотношением:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{e}}\sqrt{\frac{1}{\frac{n}{\theta_e} + \sum_{i=1}^{I}\frac{n_{0i}}{\theta_i}Z_i^2}}.$$

При этом искомое распределение потенциала будет определяться по аналогию с предыдущей задачей.

4-3. В ионизованный газ, содержащий ионы с концентрациями- n_i и зарядностями Z_i, помещается точечный заряд Q. Найти установившееся пространственное распределение потенциала в ионизованном газе, если его температура по электрофизической шкале- θ, а невозмущенная электронная плотность- n. Рассмотреть случай, когда $U \ll \theta$.

В рассматриваемом случае в любой точке пространства, за исключением начала координат, где расположен заряд, потенциал должен удовлетворять самосогласованному уравнению Пуассона:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\varphi}{dr} = \frac{e}{\varepsilon_0}(n_e - \sum_{i=1}^{I}Z_i n_i).$$

По аналогии с задачей (4-1), подставляя в это уравнение формулы (4-6) для ионных и электронных концентраций с последующим их разложением в ряд Тейлора приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{\lambda_D{}^2}=0,$$

решение которого, ограниченное на бесконечности, имеет следующий вид:

$$\varphi(r)=\frac{C}{r}\exp(-\frac{r}{\lambda_D}),$$

где константа C находится из требования, что поведение потенциала вблизи точки нахождения заряда должно следовать закону Кулона. Таким образом

$$C=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}.$$

4-4. В плоском слое плазмы с невозмущенной электронной концентрацией n в результате флюктуации все электроны сместились к границе слоя, а ионы оголились. После этого электроны начинают совершать колебания относительного своего первоначального положения. В предположении малости колебаний найти их частоту.

При смещении электронов внутри слоя образуется положительный объемный заряд ионов:

$$Q=enxS,$$

где x- толщина слоя, S- площадь поперечного сечения возмущенной области.

В результате на смещенные электроны будет действовать электрическое поле, направленное в сторону смещения, которое можно определить по теореме Гаусса:

$$\frac{1}{S}\oint \boldsymbol{E}d\boldsymbol{S}=E=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}=\frac{enx}{\varepsilon_0}.$$

Это поле сообщает каждому электрону ускорение:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{e^2n}{\varepsilon_0 m}x.$$

Полученное уравнение описывает гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega_Л = \frac{e}{\sqrt{m\varepsilon_0}}\sqrt{n} \cong 56\sqrt{n}\,. \qquad (4\text{-}10)$$

Ее называют **плазменной частотой** или **частотой колебаний Ленгмюра**.

4.5. Оценить частоту колебаний Ленгмюра, используя уравнение непрерывности и теорему Гаусса.

Подставляя в уравнение непрерывности выражение (4-4) для плотности тока, полагая скорости ионов малыми по сравнению со скоростью электронов, а возмущение электронной плотности малым по сравнению со средним ее значением n приходим к выражению:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - en\,div\mathbf{v}_e \cong 0.$$

Дифференцируя это выражение по времени с учетом 2-го закона Ньютона, имеем:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \frac{e^2 n}{m}div\mathbf{E} \cong 0.$$

Интегрируя это уравнение по области возмущения плазмы приходим , с учетом теоремы Остроградского и уравнения (4-2) к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m}Q \cong 0,$$

которое определяет колебания электрического заряда в возмущенной пространственной области плазмы с частотой Ленгмюра.

4.6. Оценить пространственный масщтаб разделения зарядов в плазме.

За эту характеристику следует принять расстояние на которое электрон может отклониться за счет своего теплового движения:

$$d \approx <v> \frac{T_Л}{4} = \frac{<v>\pi}{2\omega_Л} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{8e\theta}{\pi m}}\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m}{e^2 n}} = 2\sqrt{\pi}\lambda_D \sim \lambda_D$$

4.7. Оценить эффективное интегральное микросечение при кулоновском столкновении электрона с ионом в ионизованном газе.

Изменение проекции импульса электрона на вектор его начальной скорости **u** после одного столкновении

$$\Delta(\,mu\,)\sim mu.$$

С учетом закона Кулона, используя теорему импульсов, можно получить другую независимую оценку:

$$\Delta(mu)\sim\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\tau_{вз},$$

где b- «прицельный параметр»,

$$\tau_{вз}\sim\frac{b}{u}$$

- эффективное время взаимодействия.

Из сопоставления этих выражений получается оценка искомого микросечения:

$$\sigma(u)\approx\pi b(u)^2\sim\frac{e^4Z^2}{16\pi\varepsilon_0{}^2m^2u^4}=\pi r_e{}^2\,\frac{Z^2c^4}{u^4}, \qquad (4\text{-}11)$$

где $r_e=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$ =2.8 10^{-15}м=2.8Ф - классический радиус электрона.

4.8. В условиях задачи 4.7 оценить удельное сопротивление плазмы.

В процессе движения электрона в плазме под действием постоянного электрического поля напряженности E происходят его последовательные столкновения с ионами. Этот процесс можно интерпретировать, как действие на электрон эффективной силы трения, для которой справедлива следующая оценка:

$$F_{тр}\approx\frac{2mj}{en<\tau>},$$

где j- плотность электронного тока примерно равная плотности электрического тока, протекающего в плазме. Стационарное протекание тока в плазме устанавливается при выполнении равенства сил:

$$eE=F_{тр}.$$

Из этих соотношений следует связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля (закон Ома в дифференциальной форме):

$$j \approx \frac{e^2}{2m} n < \tau > E = \frac{E}{\rho_{пл}}, \qquad (4\text{-}13)$$

где $\rho_{пл}$- удельное сопротивление плазмы.

Подставляя в эту формулу выражение (4-12) для среднего времени между двумя последовательными электронно- ионными столкновениями, имеем:

$$j \approx 4\pi\varepsilon_0{}^2 \sqrt{\frac{2}{em}} \frac{\theta^{\frac{3}{2}}}{Z} E .$$

Эта формула позволяет получить оценку для удельного сопротивления плазмы (модификация формулы Спитцера):

$$\rho_{пл} = \sqrt{\frac{em}{2}} \frac{Z}{4\pi\varepsilon_0{}^2} \theta^{-\frac{3}{2}} . \qquad (4\text{-}14)$$

4-9. Ионизованный газ, локализованный в пространстве с характерным параметром локализации L, считается плазмой, если выполняются три критерия. 1- длина Дебая λ_D«L; 2- произведение частоты колебаний Ленгмюра на среднее время между двумя столкновениями электрона $\omega_Л\tau_c$»1; 3- число электронов в сфере с радиусом равным длине Дебая (сфера Дебая) N_D»1. Выяснить является ли плазмой полностью ионизованный углерод с плотностью ионов $n_O{}^{+6}$=10^{20}м$^{-3}$, находящийся при температуре $1.2\cdot10^3$эВ, если параметр локализации составляет величину~10^{-2}м.

В силу условия квазинейтральности плазмы, ее электронная плотность n=6.10^{20}. Согласно (4-10)

$$\omega_Л \cong 56\sqrt{n} = 1.37\cdot10^{12} \text{ Гц}.$$

Согласно (4-9)

$$\lambda_D = 7.44\ 10^3 \sqrt{\frac{\theta}{2n}} = 7.44\ 10^{-6} \text{ м} \ll L.$$

Согласно (4-12)

$$\tau_c \cong \left(\frac{2e\theta}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4\pi r_e^{\,2} c^4 Zn} \approx 5\cdot 10^{-7}\,\text{с}.$$

$$\omega_Л \tau_c \gg 1.$$

Число частиц в сфере Дебая

$$N_D = n\frac{4}{3}\pi \lambda_D^{\ 3} \cong 6\cdot 10^4 \gg 1.$$

Таким образом, по выполнению трех перечисленных выше критериев можно сделать вывод, что рассматриваемый ионизованный газ является плазмой.

4-10. В пространстве между двумя параллельными металлическими пластинами с площадью S, расположенными в вакууме на расстоянии d друг от друга, распространяется поток водородной плазмы со скоростью V. Температура плазмы- θ, концентрация электронов- n. Параллельно плоскостям пластин и перпендикулярно скорости плазменного потока приложено постоянное, однородное магнитное поле с величиной индукции B. К пластинам подсоединена нагрузка с сопротивлением R_H. Оценить мощность, выделяемую в нагрузке.

Изменение магнитного потока при прохождении участком плазмы, расположенным между пластинами расстояния dx составляет величину

$$d\Phi = Bddx.$$

При этом, в соответствии с законом Ленца (4-4), между пластинами наводится ЭДС индукции

$$Э = \frac{d\Phi}{dt} = Bd\frac{dx}{dt} = BdV.$$

Согласно закону Ома для полной цепи должно выполняться следующее соотношение для тока, протекающего в рассматриваемой цепи:

$$I = \frac{BdV}{R_{пл} + R_H},$$

где

$$R_{пл} = \rho_{пл} \frac{S}{d}$$

- электрическое сопротивление участка плазмой, находящейся между пластинами. С учетом формулы (4-14) эта формула приобретает следующий вид:

$$R_{пл} = \sqrt{\frac{em}{2}} \frac{S}{4\pi\varepsilon_0{}^2 d} \theta^{-\frac{3}{2}}.$$

В соответствии с законом Джоуля- Ленца искомую мощность можно оценить следующим образом:

$$P \cong I^2 R_H = \frac{B^2 d^2 V^2 R_H}{\left(\sqrt{\frac{em}{2}} \frac{S}{4\pi\varepsilon_0{}^2 d} \theta^{-\frac{3}{2}} + R_H\right)^2}.$$

4.11. Протон с кинетической энергией T=20 кэВ пролетает через треугольный сектор с магнитным полем, направленным вдоль вертикальной оси *z*, с индукцией магнитного поля B=0.01Тл, параллельно его основанию, вдоль оси *x*, на расстоянии p=0.05м от его вершины, вдоль оси *y*. Угол сектора $\gamma=10^\circ$. На какой угол повернется электрон?

Внутри сектора электрон движется по окружности с радиусом

$$R_L = \frac{\sqrt{2mT}}{eB}.$$

Уравнение траектории электрона:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2mT}{e^2B^2} - (x + h\sin\frac{\gamma}{2})^2} - \frac{\sqrt{2mT}}{eB}$$

соответствует точке влета в сектор с координатой $(-h\sin\frac{\gamma}{2},0)$. Правая ограничительная плоскость сектора определяется уравнением:

$$y(x)=h-\frac{x}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Электрон покидает сектор в точке траектории, соответствующей координате x_1, определяемой как корень уравнения:

$$h-\frac{x}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\sqrt{\frac{2mT}{e^2B^2}-(x+h\sin\frac{\gamma}{2})^2}-\frac{\sqrt{2mT}}{eB}.$$

Его приближенное решение с учетом малости угла γ имеет вид:

$$x_1\cong\frac{\gamma}{4}\frac{\sqrt{2mT}}{eB}\frac{2ehB+\sqrt{2mT}}{ehB+\sqrt{2mT}}.$$

Искомый угол поворота будет определяться выражением:

$$\alpha\cong\left|arctg[y'(x_1)]\right|.$$

$$y'(x)=-\frac{x+h\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\frac{2mT}{eB}-(x+h\sin\frac{\gamma}{2})^2}}.$$

$$\alpha\approx\frac{\gamma}{4}(\frac{2ehB}{\sqrt{2mT}}+\frac{\sqrt{2mT}+2ehB}{\sqrt{2mT}+ehB}).$$

4.12. Установить условие перехода разряда Таунсенда из несамостоятельного режима в самостоятельный.

Если на участке длиной dx поток электронов N при определенном напряжении между анодом и катодом в среднем увеличивается на величину

$$dN=\alpha N dx, \tag{4.15}$$

то говорят о создании условий возникновения электронной лавины.

Коэффициент пропорциональности α называется **коэффициентом ионизации** или **1-м коэффициентом Таунсенда**. Он определяется давлением и напряженностью электрического поля в рассматриваемом газовом промежутке. Если электрическое поле неоднородно, то этот коэффициент зависит от x. После интегрирования в (4.15) по ширине газового промежутка имеем для потока электронов на аноде следующее выражение:

$$N_A = N_K \exp[\int_0^d dx\alpha(x)], \tag{4.16}$$

где d- расстояние между катодом и анодом, N_K - поток электронов эмитируемых катодом. Такой нарастающий поток электронов называют **электронной лавиной**. Экспоненциальный множитель в (4.16) иногда называют **коэффициентом газового усиления** электронного тока. При этом поток ионов на катод будет определяться числом ионов, образованных при ионизации электронным ударом и дошедших до катода. Что составляет величину

$$N_i=N_A-N_K.$$

Ион, попадающий на катод, обладает определенной энергией, которая может передаваться электронам, связанным на катоде. В результате возникает эффект ионно- электронной эмиссии, при котором на каждый падающий ион катод в среднем испускает γ электронов. Таким образом, в рассматриваемом случае катод должен дополнительно, за счет ионно-электронной эмиссии испускать в единицу времени

$$\gamma(N_A-N_K)$$

электронов. Параметр γ называют **коэффициентом ионно-электронной эмиссии или 2-м коэффициентом Таунсенда.** Значение общего потока электронов с катода будет определяться выражением:

$$N_K=N_0+\gamma(N_A-N_K). \tag{4.17}$$

где N_0- собственный поток электронов с катода, испускаемых за счет активных средств (термоэмиссия, фотоэмиссия и т.д.) в отсутствии ионной бомбардировки. Помимо катодных электронов факторами первичной ионизации могут являться ионизирующие излучения различного вида, а так же высокая температура газа (см. формулу Саха).

Совместное решение уравнений (4.16) и (4.17) приводит к следующей формуле для потока электронов на анод:

$$N_A = \frac{N_0}{1-\gamma\{\exp[\int_0^d dx\alpha(x)]-1\}}\exp[\int_0^d dx\alpha(x)]. \quad (4.18)$$

Когда знаменатель в этом выражении составляет конечную положительную величину, рассмотренный процесс ионизации в газовом промежутке (**газовый разряд**) носит принудительный **несамостоятельный** характер, зависящий от фактора, определяющего первичную ионизацию или эмиссию электронов с катода, характеризуемую параметром N_0. В случае, когда выполняется условие:

$$\int_0^d dx\alpha(x) = \ln(\frac{\gamma+1}{\gamma}),$$

знаменатель в (4.18) обращается в ноль, в газовом промежутке ток перестает зависеть от N_0 и газовый разряд становится **самостоятельным**. Переход от несамостоятельного разряда к самостоятельному можно определить как **пробой** газового промежутка.

4.13. Определить плотность потока энергии, поглощаемой в высокочастотном Е- разряде.

Процесс набора энергии электроном и передачи ее в плазму можно описать, используя приближенное уравнение движения электрона в направлении, совпадающем с вектором напряженности электрического поля:

$$m\frac{dV}{dt} + m\nu V = eE_0\cos\omega t,$$

в котором ν- средняя частота электрон- ионных столкновений. Решая это уравнение, можно получить следующее выражение для скорости электрона:

$$V(t) = \frac{eE_0}{m\sqrt{\nu^2+\omega^2}}\cos(\omega t+\psi),$$

где

$$\psi = \mathrm{arctg}(\frac{\nu}{\omega}).$$

Среднее количество энергии, передаваемой электронами в единицу объема плазмы, в единицу времени за счет столкновений будет определяться следующим соотношением:

$$<q>=<FV>=nm\nu<V^2>=\frac{ne^2}{m\nu}\cdot\frac{1}{2}E_0{}^2\frac{\nu^2}{\nu^2+\omega^2}=\frac{\sigma_0}{2}E_0{}^2\frac{\nu^2}{\nu^2+\omega^2},$$

где $F(t)=nmV(t)\nu$, n- электронная концентрация.

4.14. Определить плотность потока энергии, поглощаемой в высокочастотном Н- разряде.

В Н- разряде в объеме плазменного источника, охватываемом соленоидом с переменным током $I_0\cos\omega t,$ возникает переменное магнитное поле, индукцию, которого можно оценить по известной формуле для магнитного поля соленоида:

$$B(t)\approx I_0 w\cos\omega t, \qquad (4.19)$$

где w- число витков соленоида, приходящееся на 1 длины.

Используя закон электромагнитной индукции:

$$E_\varphi\cdot 2\pi r\approx -\pi r^2\frac{\partial B}{\partial t},$$

приходим, с учетом (6.6), к следующему выражению для напряженности электрического поля:

$$E_\varphi\approx r\frac{I_0 w\omega}{2}\sin\omega t.$$

С учетом этого выражения механизм накачки энергии в плазму может быть рассмотрен по аналогии с Е- разрядом. В результате имеем следующее искомое выражение

$$<q>=\frac{ne^2}{m\nu}\cdot\frac{1}{2}E_\theta{}^2\frac{\nu^2}{\nu^2+\omega^2}=\frac{\sigma_0 w^2\omega^2}{4}r^2 I_0{}^2\frac{\nu^2}{(\nu^2+\omega^2)}.$$