3.3 Представление периодических функций времени в частотной области. Ряд Фурье.

Электромагнитные процессы, в том числе и электромагнитные помехи, принято рассматривать либо во временной, либо в частотной области. Гармонические процессы в частотной области характеризуются угловой частотой ω и частотой колебаний $f=\omega/2\pi$ (рис..). Аналитически ряд Фурье любой функции времени может быть представлен в различных формах.

Например любую несинусоидальную, ~~гармо~~ периодическую ф-цию можно представить в виде ряда Фурье

1) ### 3.3.1 Нормальная форма.

$u(t) = U_o + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega_1 t + B_n \sin n\omega_1 t)$	(1.1)

Где

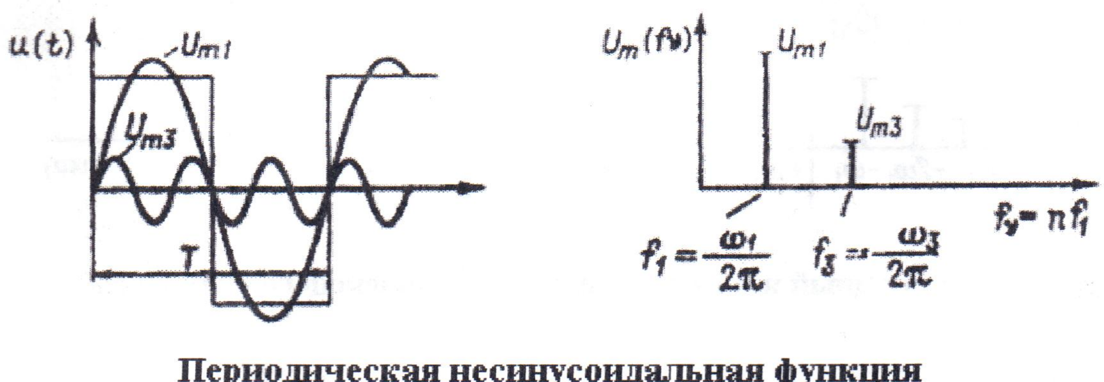
$$A_n = 2/T\int\limits_0^T u(t)\cos(n\omega_1 t)dt, \quad B_n = 2/T\int\limits_0^T u(t)\sin(n\omega_1 t)dt$$
$$U_0 = 1/T\int\limits_0^T u(t)dt \qquad (1.2)$$

Коэффициенты A_n и B_n — это амплитуды отдельных колебаний. Составляющая U_0 соответствует среднему арифметическому значению функции времени (постоянная составляющая). Таким образом, периодический сигнал содержит в себе не зависящую от времени постоянную составляющую и бесконечный набор гармонических колебаний (гармоник) с частотами, кратными основной частоте последовательности.

Например. Несимметричное напряжение прямоугольной формы можно представить себе возникшим как наложение основного колебания U_{m1} основной частоты f_1 =1/T и бесконечно многих гармонических колебаний U_{mi} с частотами mf_1 (m=2,3,4…). Зависимость амплитуды отдельных колебаний от частоты представляет собой дискретный линейчатый спектр (рис.). Наименьшая частота спектра — основная частота $f_1 = \omega_1/2\pi = 1/T$. Частоты высших гармоник являются целыми кратными этой основной частоте, например $f_3 = 3f_1$.

Любая гармоника ряда Фурье характеризуется амплитудой U_n и начальной фазой φ_n. Для этого коэффициенты ряда следует записать в виде

$$A_n = U_n\cos\varphi_n \text{ и } B_n = U_n\sin\varphi_n$$



Периодическая несинусоидальная функция

Так что

$$U_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \text{ и } \varphi_n = arctg(B_n / A_n) \qquad (1.3)$$

Тогда вместо нормальной формы можно применить **амплитудно - фазовую форму** и представить периодическую функцию в виде:

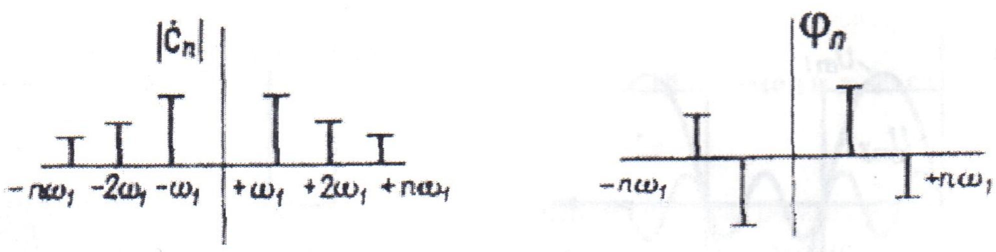
$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n)$$	(1.4)

Здесь $U_n = U_n(n\omega_1)$ - амплитудный спектр. Величину $U_n(n\omega_1)$ обычно измеряют спектральным анализатором. $\varphi_n = \varphi_n(n\omega_1)$ - фазовый спектр. Фазовый спектр в ЭМС в противоположность технике регулирования используется редко. Спектральные амплитуды U_n измеряются в вольтах, I_n — в амперах и т. д.

3.3.2 Комплексная форма

Если дополнить вышеприведенные уравнения мнимой частью и заменить тригонометрические функции по формуле Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ экспоненциальными функциями, можно получить изящный симметричный вид основной формулы спектрального анализа **в комплексной форме**

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (C_{+n} e^{jn\omega_1 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_1 t}),$$	(1.5)
где $C_n = 1/T \int_0^T u(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \lvert C_n \rvert e^{j\varphi_n} = C_n e^{j\varphi_n}$ где n=0, ±1, ±2,…	(1.6)



Амплитудный и фазовый спектры комплексного ряда Фурье

Отрицательная частота в (1.5) - это понятие не физическое, а математическое, обусловленное способом представления комплексных чисел. Учет отрицательных частот приводит к двустороннему спектру (рис..). При анализе ЭМС вместо двустороннего математического спектра $C_n = f(\pm n\omega)$ чаще всего рассчитывают односторонний физический спектр $2\lvert C_{+n} \rvert = f(\pm n\omega)$ только для положительных n, амплитуды которого отличаются на коэффициент 2 от амплитуд двустороннего спектра. Значения амплитуд одностороннего спектра измеримы, они совпадают со значениями коэффициентов косинусоидальной формы, т.е. соответствуют действительным частям векторов переменного напряжения той же частоты.