

Решение СЛАУ

(Д-269, Т-107)

Прямые методы.

Способы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разделить на две группы:

1. Точные методы – представляют собой конечные алгоритмы для вычисления корней системы (правило Крамера, метод Гаусса, метод главных элементов, метод квадратных корней и др.)
2. Итерационные методы – построенные на сходящихся бесконечных процессах, обеспечивающих заданную точность вычисления корней системы (метод итераций, метод Зейделя, метод релаксации и др.)

Полученные результаты в обоих случаях являются приближёнными из-за округления численных результатов и погрешностей методов.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (1)$$

Введем обозначения:

- матрица коэффициентов $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$
- вектор-столбец правых частей системы и вектор-столбец неизвестных

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Система (1) в матричном виде запишется как

$$Ax = b \quad (2)$$

Необходимым и достаточным условием существования единственного решения системы является условие неравенства нулю детерминанта матрицы A .

$$D = \text{Det } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

В противном случае система называется *вырожденной* и может иметь либо множество решений, либо не иметь ни одного решения.

При $D \approx 0$ система является *плохо обусловленной*. Это условие является необходимым, но недостаточным для определения плохо обусловленной системы.

Прямые методы – расчёт ведётся по конечным соотношениям (формулам) для определения неизвестных. Число операций заранее известно. Достоинством прямых методов является их относительная простота и универсальность. Недостатком является необходимость хранить в памяти компьютера сразу всю матрицу, что при большой размерности системы

приводит к неэффективности вычислений, особенно, если матрица содержит много нулевых элементов – в этом случае производятся ненужные операции с нулями. Другим недостатком является накопление погрешности результатов, т.к. последующие операции используют данные, полученные на предшествующих операциях (это особенно опасно для плохо обусловленных матриц).

Итерационные методы – методы последовательных приближений. Для работы процедуры необходимо задать начальное приближение, т.е. задать произвольное значение вектору неизвестных. Это стартовое значение позволяет провести один цикл вычислений (итерацию). Затем вычисления повторяются до достижения нужной точности результатов. Алгоритмы итерационных методов, как правило, более сложные, чем алгоритмы прямых методов. Их достоинством является отсутствие необходимости хранить в памяти машины целиком все матрицы, достаточно хранить несколько векторов с n компонентами. Погрешности вычислений не накапливаются, т.к. на текущей итерации используются результаты только предшествующей итерации, а не всех предшествующих вычислений. Более того, случайный сбой вычислений означает, что расчёт начинается с нового произвольного начального приближения.

Правило Крамера.

Для системы
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$
 вычислим $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, тогда

Решение системы запишется как

$$x = D1/D, y = D2/D$$

Алгоритм достаточно прост, однако его эффективность приемлема лишь для систем с небольшим количеством уравнений, т.к. требует большого количества вычислений определителей, число которых $n + 1$.

Использование обратной матрицы.

Если уравнение (2) умножить слева и справа на обратную матрицу A^{-1} , то

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \rightarrow x = A^{-1}b$$

Однако при большом числе уравнений, вычисление обратной матрицы также требует большого объёма вычислений, и этот метод практически не используется.

Метод Гаусса

Этот метод основан на приведении матрицы к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнений системы. С помощью первого уравнения исключается x_1 из всех последующих уравнений. Преобразованная система содержит $(n-1)$ уравнение относительно $x_2, x_3 \dots x_n$ неизвестных. Процесс повторяется – с помощью первого уравнения преобразованной системы исключается x_2 из всех последующих уравнений этой системы. Процесс продолжается до получения одного уравнения относительно неизвестного x_n . Таким образом, из исходной системы и преобразованных систем уравнений формируется матрица треугольного вида. Этот процесс называется *прямым ходом метода Гаусса*.

Например, для системы из трёх уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (4)$$

Формирование матриц в процессе прямого хода можно отобразить следующим образом

Разделив первое уравнение системы (4) на a_{11} , получим уравнение

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (7)$$

которое умножим на a_{21}

$$a_{21}x_1 + a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \quad (8)$$

Вычтем из второго уравнения (4) уравнение (8), получим

$$\left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 = b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \quad (9)$$

Умножим уравнение (7) на a_{31} и вычтем это уравнение из третьего уравнения (4)

$$\left(a_{32} - a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{33} - a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 = b_3 - a_{31}\frac{b_1}{a_{11}} \quad (10)$$

В результате этих действий пришли к системе из двух уравнений

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= b_3^{(1)} \end{aligned} \quad (11)$$

где $a_{22}^{(1)} = \left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)$, $a_{23}^{(1)} = \left(a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)$, , (12)

$$a_{32}^{(1)} = \left(a_{32} - a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right), \quad a_{33}^{(1)} = \left(a_{33} - a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right),$$

Проведём подобное преобразование для системы из двух уравнений (11) и получим одно уравнение с одним неизвестным x_3 .

$$a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)} \quad (13)$$

На этом шаге процедура прямого хода заканчивается, треугольная матрица сформирована.

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ \hline & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \hline & & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \hline \end{array}$$

(14)

В процессе формирования треугольной матрицы (исключение неизвестных) производится деления на коэффициенты a_{11} , $a_{22}^{(1)}$ и т.д. Поэтому они должны быть отличными от нуля. В случае необходимости нужно переставить уравнения системы местами, чтобы выполнить это требование.

В общем виде вычисление коэффициентов можно записать как

$$\begin{aligned}
a_{kj}^{(k)} &= a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \quad (j \geq k+1), \quad b_k^{(k)} = b_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} ; \\
a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)} \quad (i, j \geq k+1) \\
b_i^{(k)} &= b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k)} \quad (i \geq k+1) \\
(k &= 1, 2, \dots, n) \\
a_{ij}^{(0)} &= a_{ij}, \quad b_i^{(0)} = b_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned} \tag{15}$$

Верхняя строка — вычисление коэффициентов в самом верхнем уравнении системы на k -ом шаге исключения, последующие строки — вычисление остальных коэффициентов.

На следующем этапе производится вычисление неизвестных, начиная с x_n

В результате обратного хода

$$x_i = b_i^{(i)} - \sum_{k=i+1}^n a_{ik}^{(i)} x_k \quad (i = n, n-1, \dots, 1) \tag{16}$$

Последовательно вычисляются все неизвестные. Этот алгоритм часто называют схемой единственного деления, а элемент $a_{kk}^{(k-1)}$ - ведущим элементом. Решение продолжается до тех пор, пока не встретится ведущий элемент равный нулю (решение прерывается). Если ведущий элемент близок к нулю, то решение не прерывается, но погрешность сильно возрастает.

В процессе исключения неизвестных производится деление на коэффициенты

$a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \dots$, поэтому они должны быть отличны от нуля. Чтобы обеспечить выполнение этого условия, нужно соответствующим образом переставлять уравнения системы. Это должно быть заложено в вычислительный алгоритм.

Применение метода Гаусса к вычислению обратной матрицы. (Вержб. 61)

Пусть дана матрица A размерности $n \times n$. Для получения обратной матрицы A^{-1} считаем, что она является решением матричного уравнения

$$AX = E \quad (AA^{-1} = E)$$

где E - единичная матрица

Искомую матрицу X представим как набор (вектор-строку) векторов-столбцов

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad x_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

а единичную матрицу E как набор единичных векторов

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тогда матричное уравнение $AX = E$ заменим эквивалентной системой не связанных между собой векторно-матричных уравнений

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \dots, \quad Ax_n = e_n$$

Каждое из этих уравнений решается методом Гаусса. В результате работы алгоритма будут получаться последовательно столбцы обратной матрицы $X = A^{-1}$

Метод главного элемента

Для системы уравнений (1) запишем расширенную матрицу (17), где последний столбец является столбцом свободных членом (т.е. $b_i = a_{i,n+1}$). В этом алгоритме выдвигается более жёсткое требование, чем неравенство нулю диагональных элементов a_{ii} - из всех оставшихся в i -ом столбце элементов выбирается наибольший по модулю и строки переставляются таким образом, чтобы этот элемент оказался на месте диагонального элемента a_{ii} .

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1f} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2f} & \dots & a_{2q} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{if} & \dots & a_{iq} & \dots & a_{in} & a_{i,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pf} & \dots & a_{pq} & \dots & a_{pn} & a_{p,n+1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nf} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

Выберем в матрице (17) ненулевой наибольший по модулю, не принадлежащий столбцу свободных членом ($q \neq n+1$) элемент a_{pq} , который называется *главным элементом*.

Вычислим множители

$$m_i = -a_{iq} / a_{pq} \quad (18)$$

для всех строк, в которых ($i \neq p$)

Строка с номером p , содержащая главный элемент называется *главной строкой*.

Далее алгоритм метода заключается в следующем — к каждой неглавной строке добавляется главная строка умноженная на соответствующий множитель m_i . В результате этих операций получаем матрицу, у которой q -й столбец состоит из нулей. Удаляя этот столбец и главную строку получаем матрицу $M^{(1)}$ с числом строк и столбцов меньшим на еди-

ницу по сравнению с исходной матрицей M . Над матрицей $M^{(1)}$ производятся те же операции, в результате которых получаем матрицу $M^{(2)}$ с числом строк и столбцов меньшим на единицу по сравнению уже с матрицей $M^{(1)}$. В конечном итоге получаем последовательность матриц

$$M, M^{(1)}, \dots, M^{(n-1)}$$

Для нахождения неизвестных составляем систему уравнений состоящую из главных строк матриц $M, M^{(1)}, \dots, M^{(n-1)}$. Последнее уравнение этой системы представляет двучленную матрицу-строку и является главной строкой $M^{(n-1)}$.

$$a_{nn}^{(n)} x_n = a_{n,n+1}^{(n)} \quad (19)$$

Решение этого уравнения определяет значение x_n . Следующее уравнение является главной строкой матрицы $M^{(n-2)}$

$$a_{n-1,n-1}^{(n-2)} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n = a_{n-1,n+1}^{(n-2)} \quad (20)$$

Из этого уравнения определяем значение x_{n-1} , используя уже полученное значение x_n . Далее процесс продолжается до вычисления x_1 .

Разложение матриц.

Пусть дана квадратная матрица $A = [a_{ij}]$ размерностью $n \times n$ и две треугольные матрицы $L = [l_{ij}]$ $U = [u_{ij}]$ - соответственно нижняя (левая) и верхняя (правая) треугольные матрицы.

Теорема. Если все главные миноры квадратной матрицы A отличны от нуля, то существуют такие нижняя L и верхняя U треугольные матрицы, что $A = LU$.

Если элементы диагонали одной из матриц L или U фиксированы (ненулевые), то такое разложение единственно.

Схема Халецкого

Рассмотрим систему уравнений

$$Ax = b,$$

где $A = [a_{ij}]$ - квадратная матрица порядка n ,

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$, - вектор-столбцы неизвестных и свободных членов.

Представим матрицу в факторизованном виде как произведение двух треугольных матриц.

$$A = LU \quad (21)$$

,где

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$, \quad (22)$$

тогда l_{ij} и u_{ij} определяются по формулам

$$l_{i1} = a_{i1}$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad (i \geq j > 1) \quad (23)$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1,n+1}}{l_{11}}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) \quad (1 < i < j) \quad (24)$$

Искомый вектор x вычисляется из цепи уравнений

$$Ly = b, Ux = y \quad (25)$$

Так как матрицы L и U - треугольные, то

$$y_1 = \frac{a_{1,n+1}}{l_{11}}$$

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k \right) \quad (i > 1) \quad (26)$$

и

$$x_n = y_n$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k \quad (i < n) \quad (27)$$

Из формул (26) и (24) видно, что числа y_i удобно вычислять вместе с коэффициентами

u_{ij} .

Метод прогонки.

Этот метод является частным случаем метода Гаусса, который применим к разреженным системам — системам уравнений с трёхдиагональной матрицей.

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1$$

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2$$

$$a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3$$

.....

$$a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1}$$

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n$$

На главной диагонали стоят элементы b_1, b_2, \dots, b_n , на верхней диагонали — элементы c_1, c_2, \dots, c_{n-1} , на нижней диагонали — элементы a_2, a_3, \dots, a_n . Обычно все коэффициенты b_i не равны нулю. Элементы матрицы не принадлежащие этим диагоналям равны нулю. Из

первого уравнения можно выразить x_1 через x_2 . Подставив x_1 во второе уравнение можно выразить x_2 через x_3 и так далее. Следовательно, каждое x_i неизвестное можно выразить через x_{i+1} неизвестное, т. е.

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (29)$$

Из первого уравнения следует

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1} \quad (30)$$

но $x_1 = A_1 x_2 + B_1$, следовательно,

$$A_1 = -\frac{c_1}{b_1}, B_1 = \frac{d_1}{b_1} \quad (31)$$

Далее, полученное значение x_1 подставим во второе уравнение

$$a_2(A_1 x_2 + B_1) + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \quad (32)$$

отсюда

$$x_2 = \frac{-c_2 x_3 + d_2 - a_2 B_1}{a_2 A_1 + b_2} \quad (33) \quad \text{или}$$

$$x_2 = A_2 x_3 + B_2$$

$$A_2 = -\frac{c_2}{e_2}, B_2 = \frac{d_2 - a_2 B_1}{e_2}, e_2 = a_2 A_1 + b_2 \quad (34)$$

Аналогично вычисляются остальные коэффициенты

$$A_i = -\frac{c_i}{e_i}, B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{e_i}, e_i = a_i A_{i-1} + b_i, i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (35)$$

Этот этап расчёта — прямая прогонка — вычисление прогоночных коэффициентов A_i, B_i . Обратная прогонка состоит из последовательного вычисления неизвестных x_i . Сначала определяется x_n . При $i = n-1$ следует

$$x_{n-1} = A_{n-1} x_n + B_{n-1} \quad (36)$$

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n$$

исключая из этой системы уравнений x_{n-1} , находим

$$x_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}} \quad (37)$$

Итерационные методы.

Метод простой итерации. При большом числе уравнений метод Гаусса может оказаться достаточно сложным. В этом случае более удобным пользоваться не точными, а приближёнными численными методами.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Полагая $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) решим

первое уравнение относительно x_1 , второе — относительно x_2 и т. д. Получаем эквивалентную систему

$$x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n$$

$$x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n$$

.....

$$x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}$$

$$\text{где } \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad \text{при } i \neq j$$

и

$$\alpha_{ij} = 0 \quad \text{при } i = j (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Введя матрицы

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{nn} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

и систему уравнений можно записать в матричном виде

$$x^{(0)} = \beta + \alpha x$$

Эта система решается методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимается, например, столбец свободных членов $x^{(0)} = \beta$.

Затем строится первое приближение

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}$$

потом — второе приближение

$$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}$$

и т. д.

Общий алгоритм решения

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)}$$

В результате получаем последовательность $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$, предел которой (если он существует)

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$$

является решением системы $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \beta + \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$

Формулы приближений можно представить в виде

$$x_i^{(0)} = \beta_i$$

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

($\alpha_{ii} = 0; i = 1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots$)

Метод Зейделя

Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации, которая заключается в том, что при вычислении $(k+1)$ приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные $(k+1)$ приближения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{(i-1)}$

Для приведённой системы уравнений

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

выберем произвольное начальное приближение

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$$

Полагая известным k -е приближение корней, строим $(k+1)$ -е приближение по формулам

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j^{(k)}$$

.....

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

.....

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}; (k = 1, 2, \dots)$$